Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Quatrième séance d'exercices –

géodésiques

« *Aide-mémoire* »

Deux définitions équivalentes. Une géodésique est une « courbe de plus courte distance » entre deux points d'une variété différentielle. Formellement, on considèrera toujours une variété (pseudo-)Riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ munie de sa connexion de Levi-Civita. On a deux définitions équivalentes :

- Les géodésiques sont des courbes *auto-parallèles*, c'est-à-dire des courbes $x^\mu(\lambda)$ dont le vecteur tangent $u^\mu \triangleq \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ est transporté parallèlement à lui-même :

$$\nabla_u u^\mu = 0 \Leftrightarrow u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

- Les géodésiques sont des courbes *extrémales*, qui minimisent le temps propre τ (rappel : sur une variété lorentzienne, on définit $\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2$). Ce sont donc les points stationnaires de la fonctionnelle

$$\tau[x^\mu] \triangleq \int \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right|} \mathrm{d}\lambda, \tag{1}$$

  c-à-d qui satisfont à $\delta\tau/\delta x^\mu = 0$. On peut montrer que, *pour une paramétrisation affine* $\lambda = \alpha\tau + \beta$, les points stationnaires de (1) sont identiques aux points stationnaires de la fonctionnelle

$$I[x^\mu] \triangleq \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}\lambda, \qquad \mathcal{L} \triangleq \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}.$$

  Le coefficient $\frac{1}{2}$ dans la définition de $\mathcal{L}$ est purement conventionnel.

Rappel : principe variationnel. On se souvient (*c.f.* le cours de théorie des champs) que les points stationnaires de la fonctionnelle

$$S \triangleq \int \mathrm{d}t\, L[q(t), \dot{q}(t), t]$$

sont solutions des équations d'Euler-Lagrange ($\delta q = 0$ aux bords de l'intervalle considéré) :

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$